数理解析研究所講究録
271巻 1976年 16-27

射影古典群の分類空間について

京大 教養 三村 護
京大 理 河野 明

序 Gをcompact, connected Lie group, BG をその分類空間，pを素数とする。$H^*(G;\mathbb{Z}_p)$から$H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$を求める問題は，$H_*(G;\mathbb{Z})$がp-torsion freeの場合をのぞいて，一般にむつかしいようである。

この報告では，$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$についてのKono [5]の結果と $H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2)$，$H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2)$についてのKono－Mimura [7]の結果について述べる。これらのLie groupsでは$\pi_1(G)$が2-torsionを持ち，従って $H_*(G;\mathbb{Z})$ も2-torsionを持つ。

方法としては，Baum-Browderの結果を利用して，Eilenberg－Moore spectral sequence のE_2－termを計算しこれがcollapseすることを示す。$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$に関する方法は[5]とは異なっている。

この報告では$\mathbb{Z}_p$は標数pの素体と位数pの巡回群の両方を

表わす。

1. 射影古典群の cohomology

次の結果は Borel による。

<u>補題1.1</u> (Borel [3])

(1.1) $H^*(PSp(2n+1);Z_2)=Z_2[t]/(t^4)\otimes\Lambda(x_7,x_{11},\cdots,x_{8n+3})$,

(1.2) $H^*(PU(4n+2);Z_2)=Z_2[t]/(t^4)\otimes\Lambda(x_5,x_7,\cdots,x_{8n+3})$,

(1.3) $H^*(PO(4n+2);Z_2)=\Delta(t,x_2,x_3,\cdots,x_{4n+1})$,

ただし $\deg x_i=i$ $\deg t=1$ . .

PG の定義とくわしい結果は Borel [3] を見よ。

<u>定義1.2</u> $G(2n)=SU(2n)/\{\pm I_{2n}\}$ とおく

<u>定理1.3</u> (Baum-Browder [1])

補題1.1 の生成元を次の条件をみたすようにとれる。

(1.1) で $\bar{\Phi}(x_i)=\bar{\Phi}(t)=0$,

(1.2) で $\bar{\Phi}(t)=\bar{\Phi}(x_{4j+1})=0$

$\bar{\Phi}(x_{4j+3})=x_{4j+1}\otimes t^2$ $j=1,2,\cdots,2n$,

(1.3) で $\bar{\Phi}(t)=\bar{\Phi}(x_{2j})=0$

$\bar{\Phi}(x_{2j+1})=x_{2j}\otimes t$ $j=1,2,\cdots 2n$,

ただし $\bar{\Phi}$ は群の積から induce された reduced diagonal map.

2. Sp(n)の有限部分群

Sp(1)と絶対値1の四元数を同一視する。

定義2.1

$$L = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset Sp(1)$$

$$\widetilde{W}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \in Sp(n);\ \varepsilon_i = 1 \text{ or } -1 \right\},$$

$$\widetilde{V}(n) = \{\alpha \cdot A;\ A \in \widetilde{W}(n), \alpha \in L\} \subset Sp(n).$$

補題2.2

(i) $\widetilde{W}(n)$はSp(n)の従って$\widetilde{V}(n)$の*maximal dimensional elementary 2-group*である。$\widetilde{W}(n) \cong (\mathbb{Z}_2)^n$.

(ii) $\widetilde{V}(n)$は*extra-special* 2-group [4] である。

補題2.3

$$H^*(B\widetilde{V}(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \cdots, t_{n+1}]/(r_2, r_3) \otimes \mathbb{Z}_2[e]$$

ここで $\deg t_i = 1$ $\deg r_i = i$, $\deg e = 4$ さらに r_2, r_3 は $\mathbb{Z}_2[t_1, \cdots t_{n+1}]$の正則列 (*regular sequence*)

証明 $\#(\widetilde{V}(n)) = 2^{n+2}$, $\#(\widetilde{W}(n)) = 2^n$ に Quillen [10]の定理4.6を使え。

3. $H^*(BPSp(2n+1);\ \mathbb{Z}_2)$

ここでは，$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$を計算する。方法としては，Quillen の有限性定理を使う。より初等的な証明は Kono [5] にある。

補題3.1 (Borel [2])

$H^*(BSp(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[q_1, \cdots q_n] \quad \deg q_i = 4i$,

$H^*(Sp(n);\mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-1})$ で x_{4i-1} は *universally transgressive* with $\tau(x_{4i-1}) = q_i$.

定理3.2 (Quillen の有限性定理)

G を compact Lie 群 H をその閉部分群とする。k を可換体とするとき $H^*(BH;k)$ は finite $H^*(BG;k)$ module になる。

(cf. Quillen [12] §2)

X_i, Y_j を適当な deg をもつ変数とする。

$R = k[X_1, \cdots, X_n]$,　$R' = k[Y_1, \cdots, Y_{n+h}]/(r_1, \cdots, r_h)$

を graded ring とし，$r_1, \cdots, r_h$ はこの意味で homogeneous な元からなる $k[Y_1, \cdots, Y_{n+h}]$ の正則列 (Quillen [10] §1) とする。$f: R \to R'$ を deg を保つ ring homomorphism とする。

補題3·3 上の条件の下で

R' は finite R-module $\Longleftrightarrow$ $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ が R' の正則列.

注意3·4 補題3·3の条件下で，R' は free R-module

これらの事実の証明には R, R' が Cohen-Macaulay ring であることを利用する (Nagata [9], Quillen [10])

定義3·5 $F_n = Sp(n)/\tilde{V}(n)$ とおく。

注意3·6 F_1 は Briskorn variety $V(2,3,3) \cap S_\varepsilon$ になる。

(cf Milnor [8] P80)

定理3·7 fibering $F_n \xrightarrow{j} B\tilde{V}(n) \xrightarrow{i} BSp(n)$ に関する Serre のスペクトル列は collapse する ([14])。

(証明) 定理3·2と補題3·3より $i^*(q_1), \cdots i^*(q_n)$ は正則列になる。fibering $Sp(n) \to F_n \longrightarrow B\tilde{V}(n)$ に関する Serre のスペクトル列 $(E_r^{p,q})$ で各 x_{4i-1} は transgressive で $\tau(x_{4i-1}) = i^*(q_i)$。よって $E_\infty^{p,q} = 0$ if $q \neq 0$. 従って j^* は onto. よって定理が証明された。Q.E.D.

<u>系3.8</u> $H^*(F_n;\mathbb{Z}_2)\cong H^*(B\tilde{V}(n);\mathbb{Z}_2)/(\mathrm{Im}\, i^{*+})$

従って $P.S.(F_n) = (1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{4n})/(1-t)^{n+1}$.

<u>定理3.9</u> (Rothenberg − Steenrod [13])

G を compactly generated associative H-space とする。この時 次の条件をみたすスペクトル列が存在する。

$E_2 = \mathrm{Cotor}^{H^*(G;k)}(k, k)$ $E_\infty = \mathrm{gr}(H^*(BG;k))$.

<u>注意3.10</u> 上のスペクトル列は，最初 Eilenberg −Moore によって代数的に構成された。以下では，Eilenberg − Moore のスペクトル列と呼ぶ。

<u>補題3.11</u> $\mathrm{Cotor}^{H^*(PSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_8, \bar{y}_{12}, \cdots \bar{y}_{8n+4}]$

<u>補題3.12</u> $H^*(BV(n);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[\mu_1,\cdots,\mu_{n+1}]$ $\deg \mu_i = 1$

($V(n) = \tilde{V}(n)/\{\pm I_n\} \cong (\mathbb{Z}_2)^{n+1}$)

<u>定理3.13</u>

$G = PSp(2n+1)$, $k=\mathbb{Z}_2$ のとき，Eilenberg−Moore のスペクトル列は collapse する。 従って

$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[y_2, y_3, y_8, y_{12}, \cdots, y_{8n+4}]$

ここで　$\tau(t)=y_2$,　$\tau(t^2)=y_3$,　$\tau(x_{4i-1})=y_{4i}$.

（証明）

$$\begin{tikzcd} & B\hat{V}(2n+1) \arrow[r] & BSp(2n+1) \arrow[d] \\ \Gamma_{2n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & BV(2n+1) \arrow[r, "\iota"] \arrow[uur, phantom, "\circlearrowleft"] & BPSp(2n+1) \end{tikzcd}$$

の下の fibering に関する Serre のスペクトル列より

$P.S.(BPSp(2n+1)) \gg \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{8n+4})\}^{-1}$

ここで $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \ll \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ とは,

$\forall i \geq 0$　に対して　$a_i \leq b_i$

一方 Eilenberg－Moore のスペクトル列より

$P.S.(BPSp(2n+1)) \ll \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{8n+4})\}^{-1}$.

よって上の２つのスペクトル列は　どちらも collapse する。

下の結果は標準的な議論による。　　Q.E.D.

<u>系3.14</u>　ι: $BV(2n+1) \longrightarrow BPSp(2n+1)$　とする。

(i)　ι^*: $H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(BV(2n+1);\mathbb{Z}_2)$ injective

(ii)　$V(2n+1)$は　$PSp(2n+1)$の maximal dimensional elementary 2-group である。

<u>注意3.15</u>　Quillen [11] に従えば, "$V(2n+1)$　は $PSp(2n+1)$　の mod 2 cohomology を detect する" と言える。より一般な議論は Kono [6] を見よ。

4、 $H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2)$ と $H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2)$

ここでは，Kono－Mimura [7] の結果を紹介する。 証明はこの論文を見られたい。

s が odd の時 $H^*(PU(2s);\mathbb{Z}_2)\cong H^*(G(2s;\mathbb{Z}_2)$, $H^*(BPU(2s);\mathbb{Z}_2)\cong H^*(BG(2s);\mathbb{Z}_2)$ 故 $H^*(BG(2s);\mathbb{Z}_2)$ を調べる。

$A=H^*(PU(4n+2);\mathbb{Z}_2)=H^*(G(4n+2);\mathbb{Z}_2)$ とおく。

<u>定理4.1</u> $\mathrm{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[a_2,a_3,y(I),x_{8l+8}]/I$

ここに I は $a_3y(I)$, と他の homogeneous element で生成される ideal である。 $\deg y(I)$, $\deg x_{8l+8}$ は even.

くわしくは [7] を見よ。 計算には Shimada－Iwai [15] の方法を用いる，

<u>定理4.2</u> $G=PU(4n+2)$ $(G(4n+2))$, $k=\mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg-Moore のスペクトル列は collapse する。

<u>系4.3</u> $\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2)\cong \mathrm{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$$

証明には次の inclusion とスペクトル列の自然性を使う。

$$\begin{tikzcd} Sp(2n+1) \arrow[r, "\tilde{\Psi}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & SU(4n+2) \arrow[d] \\ PSp(2n+1) \arrow[r, "\bar{\Psi}"] & G(4n+2) \end{tikzcd}$$

ここで $\tilde{\Psi}$ は $\mathbb{H} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ で導かれる inclusion である。

a_3 以外の生成元がすべて even deg であることに注意せよ。

対応する $PO(4n+2)$ の結果は,

<u>定理4.2′</u> $G = PO(4n+2)$, $k = \mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg–Moore のスペクトル列は collapse する。

<u>系4.3′</u> $\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Cotor}^{H^*(PO(4n+2);\mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2).$$

参 考 文 献

[1] P. F. Baum – W. Browder: The cohomology of quotients of classical groups, Topology 3 (1965), 303–336.

[2] A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57 (1953), 115–207.

[3] A. Borel; Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math., 80 (1954), 273–342.

[4] D. Gorenstein: Finite Groups, New York, Harper and Row 1968

[5] A. Kono; On cohomology mod 2 of the classifing spaces of non-simply connected classical Lie groups (to appear).

[6] A. Kono; Cohomology of finite groups and classifing spaces of compact Lie groups (to appear).

[7] A. Kono – M. Mimura; On the cohomology of the classifing

spaces of $PSU(4n+2)$ and $PO(4n+2)$ (to appear).

[8] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton.

[9] M. Nagata: Local rings, Interscience Publ. (1962).

[10] D. Quillen: The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and Spinor groups, Math. Ann., 194 (1971), 197–212.

[11] D. Quillen: The Adams conjecture, Topology 10 66–80.

[12] D. Quillen: The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math., 94 (1971), 549–572.

[13] M. Rothenberg – N. E. Steenrod: The cohomology of classifying spaces of H-spaces, Bull. of A. M. S., 71 (1965), 872–875.

[14] J.-P. Serre: Homologie singuliere des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), 425–505.

[15] N. Shimada – A. Iwai; On the cohomology of some Hopf algebras, Nagoya Math. J. 30 (1967), 103–111.

[16] O. Zariski – P. Samuel; Commutative algebra, I, II, Van-Nostrand (1960).